数理解析研究所講究録
387巻 1980年 17-28

ある種のコンパクトRiemann面の同値問題と自己同型群

東北大 理　難波 誠

§0. 昨年（1979年）におこなわれた、多変数函数論問題特集において、志賀弘典氏は、次のような問題を提出している。

問題. V, V' を次式で定義される compact Riemann 面とする。

$$V: \quad y^n = f(x),$$
$$V': \quad y^n = h(x),$$

ここに、n は自然数，f, h は x の有理函数。この時、$V \cong V'$ (biholomorphic) となるための、f と h の関係は何か？

以下、我々はこの同値問題に対して、いくつかの条件のもとで、解答を与える。方程式が、かくもやさしい形であるにもかかわらず、一般的な解答を得るのは、むずかしいように見える。同値問題が解けると、自然に、自己同型群も

決定される事が多い。それについて得られた結果も合せて記す。(数解研で話した後に得た結果も、一諸に記すので、あらかじめ、ご了承ねがいたい。)

なお、この種の方程式で定義された compact Riemann 面は、多変数 modular 函数の具体的構成等に関連して、Picard [5], Lefschetz [2], Shimura [6], Kuribayashi [1] 等によって、研究された。

§1. 始めに、$n=p$ を素数と仮定する。f, h を次のように因数分解する。

$$V:\quad y^p = f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_m)^{k_m}\,(f_1(x))^p,$$
$$V':\quad y^p = h(x) = (x-\beta_1)^{l_1}\cdots(x-\beta_s)^{l_s}\,(h_1(x))^p,$$

ここに、$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ は互いに異なる複素数, $k_1,\cdots,k_m$ は $k_j \not\equiv 0 \pmod p$ をみたす整数, $f_1(x)$ は x の有理函数とする。V' の方についても同様とする。座標 x は V 上の order $=p$ の meromorphic function を定義するが、これを holomorphic map $V \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とみた時、$x=\infty$ が branch point となる時とならない時がある。(同値問題を考えるのだから)前者の場合、てきとうな $Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の元 B を f に合成させる (i.e., $f\circ B$ を考える) ことにより、∞

は．branch point でないと仮定してよい。この時．branch points 全体の集合は．$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ となり．$k_1 + \cdots + k_m \equiv 0 \pmod{p}$ が成立している。V' の方も同様とする。Hurwitz の公式より．V の genus は．$(p-1)(m-2)/2$ である。従って．（同値問題を考えるのであるから）V' の方の．異なる β の数 g は．m に等しいと仮定してよい。さて我々は．次の定義を与える。

$$h(x) = (x-\beta_1)^{l_1} \cdots (x-\beta_m)^{l_m} (h_1(x))^p,$$
$$\hat{h}(x) = (x-\gamma_1)^{r_1} \cdots (x-\gamma_m)^{r_m} (\hat{h}_1(x))^p,$$

（ただし．β_j は互いに異なり．$l_j \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\sum l_j \equiv 0 \pmod{p}$ をみたす。$\hat{h}$ の方も同様）において．$h \equiv \hat{h}$ とは．$\beta_1 = \gamma_1, \cdots, \beta_m = \gamma_m$ かつ $l_1 \equiv \gamma_1, \cdots, l_m \equiv \gamma_m \pmod{p}$ であること。

<u>定理1.</u> p を素数, $m \geqq 2p+1$ とする。この時 compact Riemann 面

$$V: \quad y^p = f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m} (f_1(x))^p,$$
$$V': \quad y^p = h(x) = (x-\beta_1)^{l_1} \cdots (x-\beta_m)^{l_m} (h_1(x))^p,$$

（ただし．α_j は互いに異なり．$k_j \not\equiv 0$, $\sum k_j \equiv 0 \pmod{p}$, V' の方も同様）が biholomorphic であるための必要十分条件は．$Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の元 B と．$r \not\equiv 0 \pmod{p}$ なる

整数 r が存在して. $h \equiv (f \circ B)^r$ となることである。

定理 1′. 同じ条件のもとで. 次の exact 列がある。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Aut(V) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

ここに.
$$K = \left\{ \sigma^j \in Aut(V) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma^j(x, y) = (x, \zeta^j y) \\ \zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/p}, \quad 0 \leq j \leq p-1 \end{array} \right\}$$

$$L = \left\{ B \in Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists r \not\equiv 0 \pmod p \\ \text{such that } f \equiv (f \circ B)^r \end{array} \right\}$$

例. $p=2$ とすると. 定理 1, 1′ は. hyperelliptic Riemann 面の. よく知られた命題になる。

Remark. 上の 2 定理の証明には. Namba [4], P. 86, Cor. 2.4.5 :『V を genus g の compact Riemann 面, p を $(p-1)^2 \leqq g-1$ をみたす素数とし. f を V 上の order $= p$ の meromorphic function とする。この時. V 上には (1). order $< p$ なる meromorphic function は存在せず. (2) order $= p$ なる meromorphic function は必ず $B \circ f$, $B \in Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の形になる。』を本質的に用いる。しかるに. $p=2$ の時. よく知られた楕円函数論の知識により. 定理 1 の方は $m \geqslant 5$ でなくても無条件で成立している。さらに. $p=3$

の時にも．定理1の方は．$m \geqq 7$ でなくても．無条件で成立している事が．（直接的計算等によって）わかる。それ故定理1の．$m \geqq 2p+1$ なる条件を落すか弱めるか．したいのであるが．未だ成功していない。ただし．定理1′の方は．$m \geqq 2p+1$ なる条件は．sharp である。

例．（$p=3$，$m=5$，genus $=3$）．次の例は．Picard [5] によって．とりあつかわれたもので．彼はこれを用いて．2変数 modular 函数を．楕円 modular 函数と類似の方法で構成している。

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の点 P に対し．それの決める point divisor を (p) で記すことにする。$0, 1, \alpha, \beta,$ を互いに異なる複素数とし．$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の divisor $D = (\alpha)+(\beta)$ に対し．

$$V_D:\ y^3 = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおく。$D' = (\gamma)+(\delta)$ に対し．

$$V_D \cong V_{D'}$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ such that $B\{0,1,\alpha,\beta\} = \{0,1,\gamma,\delta\}$

$\Longleftrightarrow$ divisor $D' = (\gamma)+(\delta)$ は．次のどれかに等しい。

$$(\alpha)+(\beta),\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),\ \left(\frac{1}{\beta}\right)+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

$$(1-\alpha)+(1-\beta),\ \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)+\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right),\ \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)+\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right),$$

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)+\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right),\ \left(\frac{1}{1-\beta}\right)+\left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right),$$
$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)+\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}\right),\ \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)+\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}\right),$$
$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)+\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}\right),\ \left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)+\left(\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}\right).$$

例．($p=3$, $m=6$, genus $=4$).

$$V:\quad y^3=(x^3-1)/(x^3+1)$$

には．$(x,y)\longmapsto(-y,-x)$ なる automorphism があって．$\#\mathrm{Aut}(V)=2\cdot3\cdot12=72$.

§2．次に．n を自然数，p を素数とし．V, V' を次式で定義される compact Riemann 面とする。

$$V:\quad y^n=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_p),$$
$$V':\quad y^n=(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_p),$$

ここに．α_j は互いに異なる複素数，β_j の方も同様。共に genus $=(p-1)(n-1)/2$ である。ただし．n は．p で割り切れないとする。

定理2．上の V, V' において．$n\geqq 2p+1$,

かつ、$(n, p)=1$（互いに素）と仮定する。この時 V と V' とが biholomorphic であるための必要十分条件は、$Aut(\mathbb{C})$ の元 B が存在して、$B\{\alpha_1, \cdots, \alpha_p\}=\{\beta_1, \cdots, \beta_p\}$ となることである。

系. $n \geqq 2$, $(n, 3)=1$ とする。$\lambda \in \mathbb{C}-\{0,1\}$ に対して、

$$V_\lambda : \ y^n = x(x-1)(x-\lambda)$$

とおく。この時、$V_\lambda \cong V_{\lambda'} \iff \lambda'$ は、次のどれかに等しい。

$$\lambda, \ \frac{1}{\lambda}, \ 1-\lambda, \ \frac{1}{1-\lambda}, \ \frac{\lambda-1}{\lambda}, \ \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Remark. 定理2の証明にも、やはり上述の事を本質的に用いる。$n \geqq 7$ とすると定理2から系が出るが、$n=2, 4, 5$ の時には、直接、考察して系を出す。

定理2'. 定理2と同じ条件のもとで、次の exact 列がある。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Aut(V) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

ここに、$K=\left\{\sigma^j \in Aut(V) \,\middle|\, \begin{array}{l} \sigma^j(x, y)=(x, \zeta^j y) \\ \zeta=e^{2\pi\sqrt{-1}/n}, \ 0 \leqq j \leqq n-1 \end{array}\right\}$,

$$L = \left\{ B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} B\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\} \\ \quad = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\} \end{array} \right\}$$

<u>§3.</u> nを自然数とし．V, V'を次式で定義される compact Riemann 面とする。

$$V: \quad y^n = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n),$$
$$V': \quad y^n = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n),$$

ここに．α_j は互いに異なる複素数，β_j の方も同様。これらは．$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内の curves として．non-singular であり．従って．genus $= (n-1)(n-2)/2$ である。

<u>定理3.</u> $V \cong V' \Longleftrightarrow \exists\, B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ such that $B\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$.

<u>Remark.</u> 証明には．次を用いる。『degree $n \geq 4$ の non-singular curve C on $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上には．degree n, dimension 2 の linear system は．唯一存在して．それはすなわち．line sections 全体から成るそれである。』(Namba [4], p.228, Theorem 5.1.5, 又は．石井，東大修論, 1980, 参照の事.)

<u>例.</u> ($n=5$, genus $=6$). 次の例は Shimura [6] によってとりあつかわれたもので. 2次元 Ball B上の不連続群 G で. B/G が compact になり. G-automorphic functions 全体の体が $\mathbb{C}$上 purely transcendental になると言う興味深い例の構成にむすびついている。

$0, 1, \alpha, \beta$ を異なる複素数とし. divisor $D=(\alpha)+(\beta)$ on $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対し.

$$V_D : \quad y^5 = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおく。 $D'=(\gamma)+(\delta)$ に対し

$$V_D \cong V_{D'}$$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, B \in Aut(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ such that

$$B\{\infty, 0, 1, \alpha, \beta\} = \{\infty, 0, 1, \gamma, \delta\}$$

$\Longleftrightarrow$ divisor $D'=(\gamma)+(\delta)$ は. 次の60個の divisors のどれかに等しい。

$$(\alpha)+(\beta),\ \left(\tfrac{1}{\alpha}\right)+\left(\tfrac{\beta}{\alpha}\right),\ \cdots \qquad (12\text{個}),$$

$$\left(\tfrac{1}{\alpha}\right)+\left(\tfrac{1}{\beta}\right),\ (\alpha)+\left(\tfrac{\alpha}{\beta}\right),\ \cdots \qquad (12\text{個}),$$

$$\left(\tfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)+\left(\tfrac{\beta-1}{\beta}\right),\ (1-\alpha)+\left(\tfrac{\beta-\alpha}{\beta}\right),\cdots \quad (12\text{個}),$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)+\left(\frac{\alpha\beta-\alpha}{\alpha\beta-\beta}\right),\ \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)+\left(\frac{\alpha\beta-\beta}{\alpha\beta-\alpha}\right),\ \cdots$$

(24個).

<u>定理3′</u>. Vを定理3の如くとし. $n \geqq 4$ とする。Then (i) V が Fermat curve $x^n+y^n+1=0$ と biholomorphic でないならば. 次の exact 列がある。

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

ここに.

$$K = \left\{ (x,y) \longmapsto (x, \zeta^j y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n} \\ 0 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\},$$

$$L = \left\{ B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \;\middle|\; \begin{array}{l} B\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \\ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \end{array} \right\}.$$

(ii). V ; $x^n+y^n+1=0$ においては. $\mathrm{Aut}(V)$ は.

$$(x,y) \longmapsto (x, \zeta y)$$

$$(x,y) \longmapsto (y, x)$$

$$(x,y) \longmapsto (1/x, y/x)$$

で生成され. $\#\mathrm{Aut}(V) = 6n^2$.

<u>例</u>. ($n=6$, genus $=10$).

$$V : \; y^6 = x(x^4-1)$$

においては. 定理3′の L は、正六面体群になる。故に. $\#\mathrm{Aut}(V) = 144$.

§4. 上の定理3は．次のように一般化される。

定理4. r, n を自然数として．$\mathbb{P}^{r+1}(\mathbb{C})$ 内において次式で定義される non-singular hypersurfaces V, V' of degree n を考える。

$$V: \quad X_{r+1}^n = F(X_0, \cdots, X_r),$$
$$V': \quad X_{r+1}^n = G(X_0, \cdots, X_r),$$

ここに．$(X_0 : \cdots : X_{r+1})$ は．$\mathbb{P}^{r+1}(\mathbb{C})$ の homogeneous coordinate で．F, G は homogeneous polynomials of degree n. Suppose $(r, n) \neq (2, 4)$ （つまり．V, V' は．$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の4次曲面ではないとする．)。この時．VとV'とが．biholomorphic であるための必要十分条件は．$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r(\mathbb{C}))$ の元 B が存在して．$G = F \circ B$ となる事である。

Remark. (1). 定理3′も同様に一般化されるが．それは略す。(Fermat variety $V: X_0^n + \cdots + X_{r+1}^n = 0$ は．$r \geqq 2, n \geqq 3$, $(r, n) \neq (2, 4)$ の時．$\# \mathrm{Aut}(V) = (r+2)!\, n^{r+1}$。) (2). 定理4の証明には．$r \geqq 2$ では．Matsumura－Monsky [3] を用いる。しかし．定理4において．$(r, n) \neq (2, 4)$ は必要か不明。

References.

[1]. A. Kuribayashi: On analytic families of compact Riemann surfaces with non-trivial automorphisms, Nagoya M.J., (1967), 119–164

[2] S. Lefschetz: On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to abelian varieties, Trans. Am. M. 31 (1922), 327–482.

[3] H. Matsumura – P. Monsky: On the automorphisms of hypersurfaces, J. M. Kyoto, 3 (1964), 347–361.

[4] M. Namba: Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces, Lecture notes in Math. 767, Springer, 1979.

[5] E. Picard: Sur les fonctions de deux variables independentes analogues aux fonctions modulaires, Acta M. 2 (1883), 114–135

[6] G. Shimura: On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables, Osaka J.M. 1 (1964), 1–14.